数理解析研究所講究録
674巻 1988年 1-9

# バナッハモジュール上の乗作用素のＢＳＥ型特徴付け

山形大・工　髙橋眞映　(Sin-Ei Takahasi)

**§1。問題設定と目的。** G を局所コンパクト可換群、 $G^\wedge$ をその双対群、$M(G)$ を G 上の測度環、$C^b(G^\wedge)$ を $G^\wedge$ 上の複素数値連続函数のつくるバナッハ代数とするとき、良く知られた Bochner-Schoenberg-Eberlein の定理はつぎの様に述べられる（［１１］参照）：

Let $\sigma \in C^b(G^\wedge)$ and $\beta>0$. Then the following conditions are equivalent :

(1) There exists $\mu \in M(G)$ such that $\sigma = \mu^\wedge$ and $\|\mu\| \leqq \beta$.

(2) $|\sum c_i \sigma(\gamma_i)| \leqq \beta \|\sum_i c_i \gamma_i\|_\infty$ for all finite number of $c_i \in \mathbb{C}$ and $\gamma_i \in G^\wedge$, where $\mathbb{C}$ denotes the complex numbers.

これらの条件は可換バナッハ代数の中に焼き直す事が出来る。実際 A を 可換バナッハ代数、$\Phi_A$ をそのキャリア空間、$A^*$ をその双対空間、$M(A)$ を A の乗作用素代数、 $M^\wedge(A) = \{T^\wedge : T \in M(A)\}$ とする。ここで $T^\wedge$ は T の $\Phi_A$ 上の表現函数を表す。もし次の式が成り立つならば、A はＢＳＥ代数と呼ばれる：

$$M^\wedge(A) = \{\sigma \in C^b(\Phi_A): |\sum_i c_i \sigma(\varphi_i)| \leqq \beta \|\sum_i c_i \varphi_i\|_{A^*} \text{ for all finite number of } c_i \in \mathbb{C} \text{ and } \varphi_i \in \Phi_A\}.$$

J. Wendel の定理［１２］で G の測度環と G の群環上の乗作用素代数を同一視すれば、Bochner-Schoenberg-Eberlein の定理は可換群上の群環がＢＳＥ代数である事を主張しており、また髙橋－羽鳥［９］により可換Ｃ*－代数、ディスク環、古典 ハーディー環などはいずれもＢＳＥ代数である事が示されている。

次に $G$ をコンパクト可換群、 $X$ を群環 $L^1(G)$ 上のバナッハモジュール、$\Pi X_\gamma = \{\sigma : G^\wedge \to X \mid \sigma(\gamma) \in X_\gamma\ (\forall\gamma \in G^\wedge)\}$ とする。ここで $X_\gamma = \gamma X = \{\gamma x : x \in X\}$. この時 Liu-Rooij-Wang ［５］は 次の様な $X$ 上の乗作用素の特徴付けを与えた：

$\sigma \in \Pi X_\gamma$ can be extented to a multiplier of $X$ if and only if there exists a constant $\beta > 0$ such that

$$\| \sum_i c_i \sigma(\gamma_i) \|_X \leqq \beta \| \sum_i c_i \gamma_i \|_{L^1(G)}$$

for every trigonometric polynomial $\sum_i c_i \gamma_i$ on $G$.

これは Bochner-Schoenberg-Eberlein の定理のアナロジーではあるが、ベターではない。実際上式で $L^1$-ノルムを $L^\infty$-ノルムで置き換えると、$X = C(G)$, $\sigma(\gamma) = \gamma\ (\gamma \in G^\wedge)$ に対しては明らかに上式を満たすが、$G$ が無限群である限り $\sigma$ は $X$ 上の乗作用素に拡張されない（［５］参照）。それではどの様に考えたらバナッハモジュール上に正確な Bochner-Schoenberg-Eberlein 型の条件式が導入出来、しかもそれによって乗作用素が特徴付けられるだろうか？ 我々は無理なくその様な条件式が導入される事を示し、その様な条件式によって乗作用素が特徴付けられる多くのバナッハモジュールの例を与える事が目的である。

**§２。切断とＢＳＥ不等式。** 以下 $A$ を有界近似単位元を持つ可換バナッハ代数、$\Phi_A$ をそのキャリア空間、$X$ をバナッハ左Ａ-モジュールとする。各 $\varphi \in \Phi_A$ に対して、$M_\varphi$ を $\varphi$ に対応している $A$ の極大正則イデアルとし、

$$X^\varphi = \overline{sp}\,\{M_\varphi X + (1 - e_\varphi)X\}$$

と定義する。ただし $\overline{sp}$ は { } 内の生成する $X_\varphi$ の部分空間を表し、$e_\varphi$ は $\varphi(e_\varphi) = 1$ となる $A$ の元を表す。この時、$X$ は $e_\varphi$ に依存しない事が分かる。また $X^\varphi$ は $X$ のサブモジュールとなっている。

さて各 $\varphi \in \Phi_A$ に対して $X_\varphi = X/X^\varphi$ と置くと $X_\varphi$ は $X$ のバナッハＡ-サブモジュールとなる。各 $x \in X$ に対して、$x^\wedge(\varphi) = x + X^\varphi$と定義する。次に $\Pi X_\varphi = \Pi_{\varphi\in\Phi_A} X_\varphi$ と置いて、$(a\sigma)(\varphi) = \varphi(a)\sigma(\varphi)$ $(a \in A,\ \varphi \in \Phi_A,\ \sigma \in \Pi X_\varphi)$ に

よって $\Pi X_\varphi$ はＡ-モジュールとなる。また

$$\Pi^b X_\varphi = \{\sigma \in \Pi X_\varphi : \|\sigma\|_\infty = \sup_{\varphi\in\Phi_A} \|\sigma(\varphi)\| < +\infty\}$$

と定義すると、$\Pi^b X_\varphi$ はバナッハＡ-モジュールとなる。この時、Bochner-Schoenberg-Eberlein の定理の条件式（２）に対応する式を考える。先ず各 $\varphi \in \Phi_A$ に対して、

$$\pi_\varphi(x) = x^\wedge(\varphi)$$

と置く。もし $\sigma \in \Pi X_\varphi$ が次の条件を満たす時ＢＳＥであると呼ぶ事にする：

$$\exists\beta > 0 : |\Sigma f_i(\sigma(\varphi_i))| \leqq \beta \|\Sigma f_i \cdot \pi_{\varphi_i}\|_{X^*}$$

for all finite number of $f_i \in \mathbb{C}$ and $f_i \in X^*$.

ここで $X^*$ は X の双対空間を表す。複素数体それ自身がその双対空間と同型である事を考えると上式が条件式（２）の一般化である事は容易に知れよう。次に

$$\Pi_{BSE} X_\varphi = \{\sigma \in \Pi X_\varphi : \sigma \text{ is BSE}\}$$

と置く。この時 $\Pi_{BSE} X_\varphi \subset \Pi^b X_\varphi$ となっている。

次にベクターフィールドに連続の概念を導入する為に切断を考える。このために先ず

$$\amalg X_\varphi = \bigcup_{\varphi\in\Phi_A} \{\varphi\} \times X_\varphi$$

と置き、$\pi$ を $\Phi_A \times X$ から $\amalg X_\varphi$ への自然な写像つまり、

$$\pi(\varphi, x) = (\varphi, x^\wedge(\varphi)) \quad (\varphi \in \Phi_A, x \in X)$$

とする。更に $\Phi_A \times X$ に直積位相を入れ、$\pi$ が連続となる最強の位相を $\amalg X_\varphi$ に導入する。p を $\amalg X_\varphi$ から $\Phi_A$ への自然な射影つまり

$$p(\varphi, x^\wedge(\varphi)) = \varphi \quad (\varphi \in \Phi_A, x \in X)$$

とする時、合成写像 $p\cdot\sigma$ が恒等写像となる $\Phi_A$ から $\amalg X_\varphi$ への連続写像 $\sigma$ を切断と呼ぶ。この時 $\sigma \in \Pi X_\varphi$ と $\Phi_A$ から $\amalg X_\varphi$ への写像：$\varphi \to (\varphi, \sigma(\varphi))$

を同一視すると、ベクターフィールドに連続の概念が導入される。以後この二つを区別しない事にする。$\Pi X_\varphi$ の切断全体を $\Pi^s X_\varphi$ で表し、

$$\Pi^s_{BSE} X_\varphi = \Pi_{BSE} X_\varphi \cap \Pi^s X_\varphi$$

と定義しよう。

我々は X 上の乗作用素と X のＢＳＥ切断との関係を調べたい。今 $X\hat{} = \{x\hat{} : x \in X\}$ と置くと明らかに $X\hat{} \subset \Pi^b X_\varphi$ となっている。A から X へのＡ－モジュール準同形を X 上の乗作用素と言い、その全体を M(A, X) または単に M(X) で表す。この時次の様な表現定理を得る（［８］参照）。

Theorem. (i) If $T \in M(X)$, then there exists a vector field $T\hat{}$ on $\Phi_A$ such that $(Ta)\hat{} = aT\hat{}$ for all $a \in A$.

(ii) The mapping $T \to T\hat{}$ is a continuous module homomorphism of $M(X)$ into $\Pi^b X_\varphi$, the kernel of the homomorphism being equal to $\bigcap_{\varphi \in \Phi_A} \overline{MX_\varphi}$.

更に詳しく次の様な事柄が分かる。$M\hat{}(X) = \{T\hat{} : T \in M(X)\}$ と定義する。

Lemma. (i) $X\hat{} \subset \Pi^s_{BSE} X_\varphi$.

(ii) If A is regular, then $M\hat{}(X) \subset \Pi^s_{BSE} X_\varphi$.

上の補題から我々は次の様な定義をしたい。

Definition. A Banach A-module X is said to be BSE if $M\hat{}(X) = \Pi_{BSE} X_\varphi$.

次節では多くのＢＳＥバナッハモジュールの例を述べる。

**§３。ＢＳＥバナッハモジュールの例。** 最初の例は最も単純なものであるが多くの示唆を含んでいる。

１。$A = \mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}$（複素数体$\mathbb{C}$の有限直和）とし、X をバナッハＡ－モジュールとする時、

$$X^{\wedge} = M^{\wedge}(X) = \prod_{BSE}^{s} X_{\varphi} = \prod{}^{b} X_{\varphi}$$

が成り立つ。この X は最も基本的なＢＳＥバナッハモジュールの例と考えられる。特に $A = \mathbb{C}$、X を複素バナッハ空間の場合を考えると、ＢＳＥ不等式は函数解析の基本不等式である

$$|f(x)| \leqq \|f\|\,\|x\| \quad (x \in X,\ \ f \in X^{*})$$

に他ならない。

２。上の例を更に考察して見る。A を一般の可換Ｃ＊－代数とする時、X が一般のバナッハＡ－モジュールではＢＳＥとなるかどうか分からない。しかしながら次の様な自然なバナッハモジュールはＢＳＥとなっている。

A を可換Ｃ＊－代数、I を A の閉イデアルとする時、

（ａ）I をバナッハＡ－モジュールと考えて、

$$M^{\wedge}(A, I) = \prod_{BSE}^{s} I_{\varphi} = \prod{}^{s} I_{\varphi} \cap \prod{}^{b} I_{\varphi}$$

が成り立つ。

（ｂ）A をバナッハＩ－モジュールと考えて、

$$M^{\wedge}(I, A) = \prod_{BSE}^{s} A_{\varphi} = \prod{}^{s} A_{\varphi} \cap \prod{}^{b} A_{\varphi}$$

が成り立つ。

上式を証明する際に難しいのは、ベクターフィールドの連続性を通常の函数の連続性に焼き直す作業であろう。これは次の様なよく知られた結果を用いて為される：$\pi$ を位相空間 X から集合 Y 上への写像、f を Y から位相空間 Z への写像とする。この時、もし Y に $\pi$ による商位相を導入すれば、f の連続性と合成写像 $f \cdot \pi$ の連続性とは同値である。

３。X を一般のＣ＊－代数、 Z をその中心とする。もし X のどんな原始イデアルも Z を含まないなら X は擬中心的であると言われる（［１、６、７］参照）。今 X をバナッハＺ－モジュールと見る時、X の本質性と X のＣ＊－代数としての擬中心性とは同値である。

もし X が擬中心的Ｃ＊－代数で、バナッハＺ－モジュールと見る時、

$$M^{\wedge}(Z, X) = \prod_{BSE}^{s} X_{\varphi} = \prod{}^{bs} X_{\varphi} \ (= \prod{}^{s} X_{\varphi} \cap \prod{}^{b} X_{\varphi})$$

が成り立つ。

実際 Baker［２］は Pedersen ideal の概念を用いて、$X$ の乗作用素代数 $M(X)$ から $\Pi^{bs}X_\varphi$ 上への等距離同型が存在する事を示した（[2, Theorem 3.7]参照）。一方写像：$(T, S) \to T|Z$ は $M(X)$ から $M(Z, X)$ への等距離同型を与えており、合成写像：$(T, S) \to T|Z \to (T|Z)^\wedge$ は丁度 Baker の等距離同型に一致している。また $Z$ が正則である事から補題（ii）より $M^\wedge(Z, X) \subset \overset{s}{\Pi}_{BSE}X_\varphi$ となっている。従って上式が成り立つ事を結論する事が出来る。

この様に考えると Baker の定理は擬中心的$C^*$−代数がその中心上のＢＳＥバナッハモジュールである事を述べていると見る事が出来る。

４。$G$ をコンパクト可換群、$X$ を群環 $L^1(G)$ 上のバナッハモジュールとする。この時第一節で述べた様に、Liu-Rooij-Wang は $X$ 上の乗作用素を Bochner-Schoenberg-Eberlein と類似の不等式の性質で特徴付けたが、彼らの定理は Bochner-Schoenberg-Eberlein の定理のアナロジーであってもベターではなかった。その反例として $X$ が $G$ 上の複素数値連続函数全体のなすバナッハ空間の時がそうであった。我々の立場ではこの様な場合についてはＯＫである事を述べる。

$C(G)$ を $G$ 上の複素数値連続函数全体のなすバナッハ空間とする時、モジュール積をコンボリューションで定義して、$C(G)$ は $L^1(G)$ 上のバナッハモジュールとなる。この時 $C(G)$ はＢＳＥである。つまり

$$M^\wedge(L^1(G), C(G)) = \overset{s}{\Pi}_{BSE}C(G)_\varphi$$

が成り立つ。

実際 $L^1(G)$ は正則であり有界近似単位元を持つので、補題（ii）より左辺は右辺に含まれる。さて $G$ の双対群 $G^\wedge$ を $L^1(G)$ のキャリア空間とみる事にする。この時、各 $\gamma \in G^\wedge$ のファイバーは $\mathbb{C}\gamma$ とみる事が出来る。そこで左辺が右辺に含まれる事を見る為に $\sigma \in \overset{s}{\Pi}_{BSE}C(G)_\gamma$ とする。この時、$\sigma$ に対するＢＳＥ不等式は

$$(1)\qquad \left|\sum_i c_i \lambda_\sigma(\gamma_i)\right| \leqq \beta \left\|\sum_i c_i f_{\gamma_i} | C(G)\right\|_{C(G)^*} \quad (c_i \in \mathbb{C},\ \gamma_i \in G^\wedge)$$

で置き換えられる。ただし $\beta$ は $\sigma$ だけで決まる正数であり、$\sum_i$ は有限和を表

し、$\lambda_\sigma$ は $\sigma(\gamma)=\lambda_\sigma(\gamma)\gamma$ ($\gamma\in G^\wedge$) で決められる $G^\wedge$ 上の複素数値函数を表し、$f_\gamma$ は $\gamma$ の定義する $C(G)$上の乗法的汎函数を表す。一般に $f\in(L^1(G))^*\cong L^\infty(G)$ に対して、$\|f|C(G)\|_{C(G)^*}\leqq\|f\|_\infty$ であるから（1）式と Bochner-Schoenberg-Eberlein の定理より、$(\mu_\sigma)^\wedge=\lambda_\sigma$ となる $G$ 上の正則測度 $\mu_\sigma$ が存在する。更に Gaudry の等式（［4］参照）とStone-Weierstrass の近似定理を用いると、（1）式は

$$(2)\qquad \left|\int_G f(t^{-1})d\mu_\sigma(t)\right|\leqq\beta\|f\|_1\qquad(f\in C(G))$$

と書き換えられる。しかし $C(G)$ は $L^1(G)$ で $\|\ \|_1$- dense であるから、（2）式より $\mu_\sigma$ は $L^\infty(G)$ の元と考えられる。この時 $\mu_\sigma$ の定義する $L^1(G)$-モジュール $C(G)$ 上の乗作用素を $T_\sigma$ とすると、$T_\sigma{}^\wedge=\sigma$ を示す事が出来る。この様にして、$\sigma\in M^\wedge(L^1(G),C(G))$ を得る。

5。上の例から考えて、他にＢＳＥバナッハ $L^1(G)$-モジュールを捜す事は自然であろう。$G$ を再びコンパクト可換群とし、$L^p(G)$（$1\leqq p\leqq\infty$）を $G$ 上の $p$ 乗可積分な複素数値函数全体のなすバナッハ空間とする。ただし $p=\infty$ の場合は本質的有界函数全体を表すとする。この時、やはりモジュール積をコンボリューションで定義して $L^p(G)$ は $L^1(G)$ 上のＢＳＥバナッハモジュールとなる。つまり

$$M^\wedge(L^1(G),L^p(G))=\Pi^{s}_{BSE}L^p(G)_\varphi\ (1\leqq p\leqq\infty)$$

が成り立つ。勿論上式で $p=1$ の場合が元々のコンパクトケースに対する Bochner-Schoenberg-Eberlein の定理を述べている。証明は $C(G)$ の場合を参考にすれば出来るであろ。

ただし $p=\infty$ の場合の証明に関してはある等式を示す必要があったが、これは泉池敬司氏によって示された事をここに記して置く。

**§4。問題。** 例１から次の様な問題を考える事は自然であろう。

問題１。どの様な可換Ｃ$^*$ー代数であれば、この代数上のバナッハモジュールは常にＢＳＥとなるか？　またその様な可換Ｃ$^*$ー代数を決定せよ。

勿論例１は可換な有限次元Ｃ$^*$ー代数がその様なものである事を示している。こ

こで、もしモジュール積が恒等的にゼロである様なバナッハモジュールは常にＢＳＥである事を注意しておく。

次にノンコンパクトケースに対しても例４、５が成り立つかどうかは興味のあるところであろう。

問題２。$G$ をその双対群が非離散である様な局所可換群、$X$ を $C(G)$ または $L^p(G)$（$1 \leqq p \leqq \infty$）とする時，$X$ はバナッハ $L^1(G)$-モジュールとしてＢＳＥであるか？

この問題の難しさはコンパクトケースと違ってそのファイバー空間を決定する所にあると思われる。

［９］の中で測度環の非ＢＳＥ性が示されているが、それが群環上のバナッハモジュールと見る時、やはり非ＢＳＥであるかどうかを調べる事は大切であろう。

問題３。$G$ を局所可換群、$M(G)$ を $G$ 上の測度環とする。この時、$M(G)$ を $L^1(G)$ 上の自然なバナッハモジュールと見て、ＢＳＥであるかどうか？

最後に素朴な疑問として次の様な問題を提唱したい。

問題４。$A$ を有界近似単位元を持つ可換バナッハ代数、$X$ をバナッハＡ－モジュールとする時、$\prod^{s}_{BSE} X_{\varphi}$ もまたバナッハＡ－モジュールとなるか？

この問題の難しさはベクターフィールドの和と積が連続性に関して閉じているかどうかにあると思われる。

## References


[1] R. J. Archbold, Density theorems for the center of a C*-algebra, J. London Math. Soc. (2)10(1975), 187-197.

[2] C. W. Baker, The pedersen ideal and the representation of C*-algebras, Rocky Mount. J. Math. 13(1983), 699-707.

[3] R. S. Doran and J. Wichmann, Approximate identities and factorization in Banach modules, Lecture Notes in Math. # 768, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1979.

[4] R. Larsen, An introduction to the theory of multipliers, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971.

[5] T. S. Liu, A. C. M. van Rooij and J.-K. Wang, A generalized Fourier transformation for $L_1(G)$-modules, J. Austral. Math. Soc.(Series A) 36(1984), 365-377.

[6] S. Takahasi, On the center of quasi-central Banach algebras with bounded approximate identity, Can. J. Math. 33(1981), 68-90.

[7] S. Takahasi, Central double centralizers on quasi-central Banach algebras with bounded approximate identity, ibid, 35(1983), 373-384.

[8] S. Takahasi, An extension of Helson-Edwards theorem to Banach modules, preprint.

[9] S. Takahasi and O. Hatori, Commutative Banach algebras which satisfy Bochner-Schoenberg-Eberlein type theorem, preprint.

[10] C. E. Rickart, General theory of Banach algebras, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1960.

[11] W. Rudin, Fourier analysis on groups, New York, N. Y.: Interscience Publishers, Inc. 1962.

[12] J. G. Wendel, Left centralizers and isomorphisms of group algebras, Pacific J. Math. 2(1952), 251-261.